

Contoh Soal Integral :

Tentukan hasil integral fungsi-fungsi berikut.

- a. $\int 5 \, dx$
- b. $\int 4x^5 \, dx$
- c. $\int 2 \sqrt[3]{x} \, dx$

Pembahasan :

a. $\int 5 \, dx = 5 \int dx = 5x + c$

b. $\int 4x^5 \, dx = 4 \int x^5 \, dx = \frac{4}{5+1} x^{5+1} + c = \frac{4}{6} x^6 + c = \frac{2}{3} x^6 + c$

c. $\int 2 \sqrt[3]{x} \, dx = 2 \int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{2}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{6}{4} x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} + c$

Contoh Soal Integral 2:

Selesaikan setiap pengintegralan berikut.

- a. $\int x^4 \sqrt{x} \, dx$
- b. $\int (x+3)^2 \, dx$

Penyelesaian :

a. $\int x^4 \sqrt{x} \, dx = \int x^4 \cdot x^{1/2} \, dx = \int x^{4\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{4\frac{1}{2}+1} x^{4\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{4\frac{1}{2}+1} x^{\frac{11}{2}} + c$

b. $\int (x+3)^2 \, dx = \int (x^2 + 6x + 9) \, dx = \frac{1}{3} x^3 + 3x^2 + 9x + c$

3. Menentukan Persamaan Kurva

Di kelas XI, kalian telah mempelajari gradien dan persamaan garis singgung kurva di suatu titik.

Jika $y = f(x)$, gradien garis singgung kurva di sembarang titik pada kurva adalah $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$. Oleh karena itu, jika gradien garis singgungnya sudah diketahui maka persamaan kurvanya dapat ditentukan dengan cara berikut.

$$y = \int f'(x) \, dx = f(x) + c$$

Jika salah satu titik yang melalui kurva diketahui, nilai c dapat diketahui sehingga persamaan kurvanya dapat ditentukan.

Contoh Soal 3 :

Diketahui turunan dari $y = f(x)$ adalah $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x + 3$.

Jika kurva $y = f(x)$ melalui titik $(1, 6)$, tentukan persamaan kurva tersebut.

Jawaban :

Diketahui $f'(x) = 2x + 3$.

Dengan demikian, $y = f(x) = \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + c$.

Kurva melalui titik $(1, 6)$, berarti $f(1) = 6$ sehingga dapat kita tentukan nilai c , yaitu $1 + 3 + c = 6 \leftrightarrow c = 2$.

Jadi, persamaan kurva yang dimaksud adalah $y = f(x) = x^2 + 3x + 2$.

Contoh Soal 4 :

Gradien garis singgung kurva di titik (x, y) adalah $2x - 7$. Jika kurva tersebut melalui titik $(4, -2)$, tentukanlah persamaan kurvanya.

Penyelesaian :

Gradien garis singgung adalah $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2x - 7$ sehingga :

$$y = f(x) = \int (2x - 7) dx = x^2 - 7x + c.$$

Karena kurva melalui titik $(4, -2)$ maka :

$$\begin{aligned} f(4) = -2 &\leftrightarrow 4^2 - 7(4) + c = -2 \\ \leftrightarrow -12 + c &= -2 \\ \leftrightarrow c &= 10 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan kurva tersebut adalah $y = x^2 - 7x + 10$.

Contoh Soal 5 :

Biaya marginal suatu perusahaan ditunjukkan oleh $MC = 4Q^2 - 3Q + 5$, dengan Q = banyak unit dan biaya tetap $k = 3$, k adalah konstanta integral. Tentukan persamaan biaya total (C).

Pembahasan :

Fungsi biaya marginal $MC = 4Q^2 - 3Q + 5$.

$MC = dC / dQ$ = dengan kata lain $dC = MC dQ$

$C = \int MC dQ$

$$\begin{aligned} &= \int (4Q^2 - 3Q + 5) \, dQ \\ &= \frac{4}{3} Q^3 - \frac{3}{2} Q^2 + 5Q + k \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $C = \frac{4}{3} Q^3 - \frac{3}{2} Q^2 + 5Q + k$