PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

A. Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah persamaan yang memiliki bentuk umum $y = ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$. Huruf a, b, dan c disebut sebagai koefisien. Koefisien kuadrat a adalah koefisien dari x^2, koefisien linier b adalah koefisien dari x, dan c adalah koefisien konstan atau disebut juga suku bebas.

Nilai-nilai dari a, b, dan c menentukan bagaimana bentuk parabola dari fungsi persamaan kuadrat.

- a menentukan seberapa cekung/cembung parabola yang dibentuk oleh fungsi kuadrat. Nilai $a > 0$ akan menyebabkan parabola terbuka ke atas, sedangkan nilai $a < 0$ akan menyebabkan parabola terbuka ke bawah.
- b menentukan kira-kira posisi x puncak parabola, atau sumbu simetri cermin dari kurva yang di bentuk. Sumbu simetri $= \frac{-b}{2a}$.
- c menentukan titik potong fungsi parabola yang dibentuk dengan sumbu y atau saat $x = 0$.

a.1 Akar-akar Persamaan Kuadrat

Ada bebrapa cara untuk menyelesaikan / menentukan akar-akar persamaan kuadrat, yaitu dengan :

a. Memfaktorkan
b. Melengkapkan kuadrat sempurna
c. Menggunakan rumus akar kuadrat

a. Menenukan Akar-akar Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Jika $ax^2 + bx + c = 0$ dapat difaktorkan, maka akar-akarnya dapat dicari dengan sifat : Jika $p,q \in R$ dan berlaku $pq = 0$, maka $p = 0$, atau $q = 0$.

Contoh : akar-akar dari $x^2 + 6x + 8 = 0$

Jawab : $x^2 + 6x + 8 = 0$

$(x + 2)(x + 4) = 0$

$x + 2 = 0$ atau $x + 4 = 0$

$x = -2$ atau $x = -4$

Contoh soal : Sebuah gambar yang berukuran 20cm x 24 cm dikelilingi bingkai yang luasnya 416cm^2. Tentukan lebar bingkai tersebut!

Jawab : Misalkan lebar binkai x cm, sehingga dapat diperoleh persamaan kuadrat (20 + 2x)(24 + 2x) = (20 x 24) + 416

$4x^2 + 88x + 480 = 480 + 416$

$4x^2 + 88x + 480 - 480 - 416 = 0$

$4x^2 + 88x - 416 = 0$

$x^2 + 22x +- 104 = 0$

$(x + 26)(x - 4) = 0$

$x = -26$ atau $x = 4$

Jadi, lebar bingkai adalah 4cm.

b. Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Cara ini dapat dipahami dengan contoh sebagai berikut :

Tentukan akar-akar dari $x^2 - 6x + 5 = 0$!

Jawab : $x^2 - 6x + 5 = 0$

$x^2 - 6x = -5$

$x^2 - 6x + 9 - 9 = -5$

$(x^2 - 6x + 9) = -5 + 9$

$(x - 3)2 = 4$

$(x - 3) = \pm \sqrt{4}$

$x - 3 = 2$ atau $x - 3 = -2$

$x = 5$ atau $x = 1$

c. Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat dengan Menggunakan Rumus-rumus Kuadrat

Rumus kuadrat yang di pakai adalah :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Keterangan :

1. x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat.
2. $\{x_1$ dan $x_2\}$ merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat.
3. $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan

Contoh : Tentukan akar-akar dari persamaan berikut $x^2 + 6x + 8 = 0$!

Jawab : a = 1, b = 6, c = 8

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4.1.8}}{2.1}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 2}{2}$$

Jadi, $x_1 = \frac{-6+2}{2}$ =-2 atau $x_2 = \frac{-6-2}{2}$ =-4.

a.2 Sifat – Sifat Persamaan Kuadrat

1. Jumlah dan Hasil kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari $x^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$, maka:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dan $x1.x2 = \frac{c}{a}$

Contoh : Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari $x^2 - 6x + 9 = 0$, maka tentukan :

a. $x_1 + x_2$
b. $x_1.x_2$

Jawab : a=1, b=-6, c=9

a. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$
b. $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$

2. Diskriminan Persamaan Kuadrat

Diskriminan dari persamaan $x^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$, maka :

$D = b^2 - 4ac$

- Jika D > 0, kedua akarnya bilangan real yang berbeda
- Jika D < 0, kedua akarnya bilangan kompleks
- Jika D = 0, kedua akarnya bilangan real dan sama
  Contoh : Tentukan nilai n agar persamaan kuadrat $x^2 + (mx - 5)2 = 9$ mempunyai akar real sama!

Jawab : $x^2 + (mx – 5)2 = 9$

$x^2 + (m^2x^2 – 10mx + 25) = 9$

$x^2 + m^2x^2 – 10mx + 25 – 9 = 0$

$(1 + m^2)x^2 – 10mx + 16 = 0$

$a = 1 + m^2$, $b = -10m$, $c = 16$

$D = (-10m)^2 – 4(1 + m^2)(16)$

$= 100m^2 – 64 -64m^2$

$= 36m^2 – 64$

Syarat akar-akar sama adalah D = 0

$36m^2 – 64 = 0$

$36m^2 = 64$

$m^2 = \frac{64}{36}$

$m^2 = \pm \sqrt{\frac{64}{36}}$

$m = \pm \frac{8}{6} = \pm \frac{4}{3}$

Jadi nilai n yang memenuhi adalah $m = \frac{4}{3}$ atau $m = -\frac{4}{3}$

B. Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat adalah persamaan yang memiliki bentuk umum :

1. $ax^2 + bx + c < 0$
2. $ax^2 + bx + c \leq 0$
3. $ax^2 + bx + c \geq 0$
4. $ax^2 + bx + c > 0$

Langkah – langkah menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat menggunakan garis bilangan :

1. Ubah bentuk pertidaksamaan kuadrat dalam bentuk baku .

2. Tentukan pembuat nol bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan mencari penyelesaian dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Misalkan pembuat nol bentuk $ax^2 + bx + c$ adalah x_1 dan x_2, gambarkan garis bilangan ($x = x_1$) dan ($x = x_2$), kemudian tandailah daerah positif dengan tanda “+” dan daerah negatif dengan tanda “-“ dengan melakukan pengujian beberapa titik di sekitar ($x = x_1$) dan ($x = x_2$). Jangan gunakan $x = x_1$ dan $x = x_2$.
4. Arsirlah daerah bertanda positif jika tanda pertidaksamaan kuadrat bakunya >, ≥ atau arsir daerah bertanda negatif jika tanda pertidaksamaan kuadrat bakunya <, ≤
5. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat adalah daerah yang sesuai dengan nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat baku.

Contoh : Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat $x^2 + 3x + 5 < 3$!

Jawab :

- $x^2 + 3x + 5 < 3$ diubah menjadi $x^2 + 3x + 5 – 3 < 0$

  $x^2 + 3x + 5 – 3 = 0$

  $(x + 2)(x + 1)= 0$

  $x = -2$ atau $x = -1$

- Untuk x = 0 maka x2 + 3x + 2 bernilai 2 (+)

  Untuk x = $-1\frac{1}{2}$, maka bernilai $-\frac{1}{4}$ (-)

  Untuk x = -3, maka bernilai 2 (+)

- Himpunan penyelesaianya adalah : x dimana $-2 < x < -1$, $x \in R$