BILANGAN BERPANGKAT DAN BENTUK AKAR

a. Sifat Operasi Bilangan Bulat Berpangkat

Definisi Pangkat Bulat Positif

Jika a adalah bilangan real (nyata) dan n adalah bilangan asli (bilangan bulat positif), maka

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor } a}$$

dengan n = pangkat atau eksponen

a = bilangan pokok/dasar/basis

a^n = bilangan berpangkat (n ditulis di sebelah kanan atas a)

a^n dibaca: "a pangkat n" atau "a dipangkatkan n".

Misalanya 5^2 dibaca 5 pangkat 2 atau 5 dipangkatkan 2 atau 5 kuadrat; 7^3 dibaca 7 pabgkat 3 atau 7 dipangkatkan 3.

$a \times a \times a \times ... \times a$ = hasil perpangkatan

Dalam kasus $n = 1$, maka $a^1 = a$.

Contoh:

Tulislah setiap bilangan 64 dan 2.250 dalam bentuk pangkat bilangan prima.

Solusi:

a.

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

Karena banyak angka 2 ada 6 buah, maka $64 = 2^6$

b.

2	2.250
3	1.125
3	375
5	125
5	25
	5

Karena banyak angka 2 ada 1 buah, angka 3 ada 2 buah, dan 5 ada 3 buah, maka $2.250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$

1. Nilai Bilangan Berpangkat

Nilai bilangan berpangkat adalah hasil dari suatu perpangkatan.

Contoh:

Hitunglah

a. 5^4 b. $3^2 + 2^2 + 3^3$

Solusi:

a. $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

b. $3^2 + 2^3 + 10^3 = 3 \times 3 + 2 \times 2 \times 2 + 10 \times 10 \times 10 = 9 + 8 + 1.000 = 1.017$

2. Sifat-sifat Bilangan Berpangkat

Jika m, n, dan p adalah bilangan bulat positif (bilangan asli), a dan b adalah bilangan-bilangan real (nyata), maka

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$, jika $m > n$ dan $a \neq 0$
3. $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$, jika $m < n$ dan $a \neq 0$
4. $\left(a^m\right)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$

5. $\left(a^m \times b^n\right)^p = a^{m\times p} \times b^{n\times p} = a^{mp} b^{np}$

6. $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{m\times p}}{b^{n\times p}} = \frac{a^{mp}}{b^{np}},\ b \neq 0$

Contoh:

Sederhanakanlah

a. $2^3 \times 2^6$ c. $7^6 : 7^4$ e. $\left(10^3\right)^2$ g. $\left(\frac{6^4}{7^9}\right)^{10}$

b. $5^8 \times 5^{12}$ d. $3^4 : 3^7$ f. $\left(2^6 \times 5^{10}\right)^5$

Solusi:

a. $2^3 \times 2^6 = 2^{3+6} = 2^9 = 512$

b. $5^8 \times 5^{12} = 5^{8+12} = 5^{20}$

c. $7^6 : 7^4 = 7^{6-4} = 7^2 = 49$

d. $3^4 : 3^7 = \frac{1}{3^{7-4}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

e. $\left(10^3\right)^2 = 10^{3\times 2} = 10^6 = 1.000.000$

f. $\left(2^6 \times 5^{10}\right)^5 = 2^{6\times 5} \times 5^{10\times 5} = 2^{30} 5^{50}$

g. $\left(\frac{6^4}{7^9}\right)^{10} = \frac{6^{4\times 10}}{7^{9\times 10}} = \frac{6^{40}}{7^{90}}$

b. Bentuk Akar

1. Kuadrat Suatu Bilangan

Bilangan kuadrat diungkapkan (diekspresikan) sebagai a^2 yang artinya perkalian berulang dari *a* sebanyak dua kali, ditulis $a^2 = a \times a$. Ekspresi a^2 dibaca *a* kuadrat (*a* dikuadratkan) atau *a* pangkat 2 (*a* dipangkatkan 2). Misalnya 7^2 dibaca 7 kuadrat, 10^2 dibaca 10 kuadrat.

Nilai kuadrat dari suatu bilangan adalah nilai yang dihasilkan dari perkalian bilangan sebanyak dua kali. Nilai dari a^2 adalah $a \times a$.

Bilangan kuadrat mempunyai ciri khas antara angka akhir bilangan yang dipangkatkan dengan angka akhir hasil perpangkatan.

Bilangan yang dipangkatan dua dengan angka akhir	Bilangan hasil perpangkatan dua dengan angka akhir
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

Contoh:

Hitunglah

a. 7^2 b. 9^2 c. 10^2 d. 54^2 e. 253^2 f. 1.502^2

Solusi:

a. $7^2 = 7 \times 7 = 49$

b. $9^2 = 9 \times 9 = 81$

c. $10^2 = 10 \times 10 = 100$

d. $54^2 = 54 \times 54 = 2.916$

e. $253^2 = 253 \times 253 = 64.009$

f. $1.502^2 = 1.502 \times 1.502 = 2.256.004$

2. Akar Kuadrat Suatu Bilangan

Jika n adalah bilangan asli dengan $n > 1$ dan apabila a dan b sedemikan rupa sehingga $a^n = b$, maka dikatakan bahwa a adalah akar pangkat n dari b, ditulis $a = \sqrt[n]{b}$, dengan n adalah indeks (tingkat akar) dari bentuk akar (radikal), b adalah bilangan yang diambil akarnya (radikan), dan lambang $\sqrt{\ }$ dinamakan tanda akar kuadrat.

Dalam kasus $n = 2$, maka indeksnya dihilangkan, sehingga $\sqrt{b}$ mempunyai arti $\sqrt[2]{b}$. Ekspresi $\sqrt{b}$ dibaca "akar pangkat dua dari b" atau "akar kuadrat dari b". Perlu diperhatikan bahwa, nilai dari $a = \sqrt{b}$ hanya ada satu nilai. Sebagai ilustrasi: $\sqrt{9} = 3$, karena $3^2 = 9$. Walaupun $(-3)^2 = 9$, tetapi $\sqrt{9} \neq -3$. Peristiwa memperoleh 3 dari $\sqrt{9}$ biasa dinamakan menarik akar (kuadrat).

Bilangan yang ditarik akarnya mempunyai ciri khas antara angka akhir bilangan yang ditarik akarnya dengan angka akhir hasil menarik akar itu.

Bilangan (kuadrat) yang ditarik akarnya dengan angka akhir	Bilangan hasil penarikan akar dengan angka akhir
0	0
1	1 atau 9
4	2 atau 8
5	5
6	4 atau 6
9	1 atau 3

1. Menarik Akar dari Bilangan yang Hasilnya Rasional atau Bentuk Akar

Untuk menarik dari akar kuadrat dapat digunakan konsep rumus-rumus berikut ini.

1. $\sqrt{a^2b^4c^{20}} = a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{4}{2}}c^{\frac{20}{2}} = a^1b^2c^{10} = ab^2c^{10}$
2. $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$
3. $\sqrt{a^4b^{15}} = a^2b^7\sqrt{b}$

Contoh:

Sederhnakanlah

a. $\sqrt{196}$ b. $\sqrt{5184}$ c. $\sqrt{72}$ d. $\sqrt{648}$

Solusi:

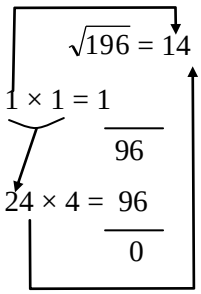
a. **Strategi 1:**

2 | 196	$196 = 2^2 \times 7^2$
2 | 98	Jadi, $\sqrt{196} = \sqrt{2^2 \times 7^2} = 2 \times 7 = 14$
7 | 49	
7	

Strategi 2:

Nilai dari $\sqrt{196}$ dapat dicari dengan prosedur sebagai berikut ini.

- Langkah 1: Kelompokkan bilangan-bilangan itu (radikan) dari kanan ke kiri, dengan tiap kelompok terdiri dari dua angka.
- Pilih dua angka yang sama yang hasil kalinya sama atau mendekati 1.
- Jumlahkan dua angka yang sama itu (1 + 1 = 2), kemudian pilih angka yang sama lagi, kemudian pilih angka yang sama lagi sebagai pasangan 2 yang jika dikalikan sama atau mendekati 96, yaitu 4, sehingga 24 × 4 = 96.



- Jawabannya adalah dua angka yang sama yang dipilih itu.

b. **Strategi 1:**

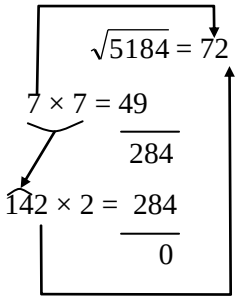
2	5184
2	2592
2	1296
2	648
2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
	3

$5184 = 2^5 \times 3^4$

Jadi, $\sqrt{5184} = \sqrt{2^6 \times 3^4} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$

Strategi 2:

Nilai dari $\sqrt{5184}$ dapat dicari dengan prosedur sebagai berikut ini.



- Langkah 1: Kelompokkan bilangan-bilangan itu (radikan) dari kanan ke kiri, dengan tiap kelompok terdiri dari dua angka.
- Langkah 2: Pilih dua angka yang sama yang hasil kalinya sama atau mendekati 51.
- Langkah 3: Jumlahkan dua angka yang sama itu (7 + 7 = 14), kemudian pilih angka yang sama lagi sebagai pasangan 14 yang jika dikalikan sama atau mendekati 284, yaitu 2, sehingga 142 × 2 = 284.
- Langkah 4: Jawabannya adalah dua angka yang sama yang dipilih itu.

c. $\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \times 3^2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

d. $\sqrt{432} = \sqrt{2^4 \times 3^3} = 2^2 \times 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

2. Menarik Akar dari Bilangan yang Hasilnya Dinyatakan Dalam Desimal

Contoh: Hitunglah $\sqrt{5}$ dan $\sqrt{837}$

Solusi:

a. Nilai dari $\sqrt{5}$ dapat dicari dengan prosedur sebagai berikut ini.

- Langkah 1: Tuliskan angka nol dibelakang tanda koma sesuai kebutuhan.
- Langkah 2: Kelompokkan bilangan-bilangan itu (radikan) dari kanan ke kiri, dengan tiap kelompok terdiri dari dua angka.
- Langkah 3: Pilihlah dua angka yang sama yang hasil kalinya sama atau mendekati 5, yaitu 2, sehingga 2 × 2 = 4.
- Langkah 4: Jumlahkan dua angka yang sama itu (2 + 2 = 4), kemudian pilih angka yang sama lagi sebagai pasngan 4 yang jika dikalikan sama atau mendekati 100, yaitu 2 sehingga 42 × 2 = 84.
- Demikian seterusnya, sampai desimal yang diminta.
- Langkah 5: Jawabannya adalah angka-angka yang sama yang dipilih itu.

$$\sqrt{5{,}000000} = 2{,}236\ldots$$

$2 \times 2 = 4$
100 (mulai diberi tanda koma, karena sudah ada
$42 \times 2 = 84$ penambahan nol)
1600
$443 \times 3 = 1329$
27100
$4466 \times 6 = 26796$
304

Jadi, $\sqrt{5} = 2{,}236....$

b. Nilai dari $\sqrt{837}$ dapat dicari dengan prosedur sebagai berikut ini.
- Langkah 1: Tuliskan angka nol dibelakang tanda koma sesuai kebutuhan.
- Langkah 2: Kelompokkan bilangan-bilangan itu (radikan) dari kanan ke kiri, dengan tiap kelompok terdiri dari dua angka.
- Langkah 3: Pilihlah dua angka yang sama yang hasil kalinya sama atau mendekati 8, yaitu 2, sehingga $2 \times 2 = 4$.
- Langkah 4: Jumlahkan dua angka yang sama itu ($2 + 2 = 4$), kemudian pilih angka yang sama lagi sebagai pasngan 4 yang jika dikalikan sama atau mendekati 437, yaitu 8 sehingga $48 \times 8 = 384$.
- Demikian seterusnya sesuai dengan kebutuhan, sampai decimal yang diminta terpenuhi.
- Langkah 5: Jawabannya adalah angka-angka yang sama yang dipilih itu.

$$\sqrt{837{,}000000} = 28{,}93\ldots$$

$2 \times 2 = 4$
437
$48 \times 8 = 384$
5300 (mulai diberi tanda koma, karena sudah
$569 \times 9 = 5121$ ada penambahan nol)
17900
$5783 \times 3 = 17349$
551

Jadi, $\sqrt{837} = 28{,}93....$

c. Pangkat Tiga dan Akar Pangkat Tiga Suatu Bilangan

1. Pangkat Tiga Suatu Bilangan

Arti pangkat tiga suatu bilangan adalah hasil perkalian tiga factor yang masing-masing bilangan itu sendiri. Jadi, $a^3 = a \times a \times a$. Ekspresi a^3 dibaca "a pangkat tiga" atau "a kubik". Nilai pangkat tiga dari suatu bilangan adalah nilai yang dihasilkan dari perkalian bilangan sebanyak tiga kali. Nilai dari a^3 adalah $a \times a \times a$.

Bilangan pangkat tiga mempunyai ciri khas antara angka akhir bilangan yang dipangkatkan dengan angka akhir hasil perpangkatan.

Bilangan yang dipangkatan tiga dengan angka akhir	Bilangan hasil perpangkatan tiga dengan angka akhir
0	0
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

Contoh:

Hitunglah

a. 5^3 b. 12^3 c. 234^3

Solusi:

a. $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

b. $12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1.728$

c. $234^3 = 234 \times 234 \times 234 = 12.812.904$

2. Akar Pangkat Tiga Suatu Bilangan

Jika n adalah bilangan asli dengan $n > 1$ dan apabila a dan b sedemikan rupa sehingga $a^n = b$, maka dikatakan bahwa a adalah akar pangkat n dari b, ditulis $a = \sqrt[n]{b}$, dengan n adalah indeks (tingkat akar) dari bentuk akar (radikal), b adalah bilangan yang diambil akarnya (radikan), dan lambang $\sqrt[3]{\ }$ dinamakan tanda akar pangkat tiga.

Dalam kasus $n = 3$, maka $a = \sqrt[3]{b}$. Ekspresi $\sqrt[3]{b}$ dibaca "akar pangkat tiga dari b" atau "akar kubik dari b". Perlu diperhatikan bahwa, nilai dari $a = \sqrt[3]{b}$ hanya ada satu nilai. Sebagai ilustrasi: $\sqrt[3]{8} = 2$, karena $2^3 = 8$. Peristiwa memperoleh 2 dari $\sqrt[3]{8}$ biasa dinamakan menarik akar (kubik).

Bilangan yang ditarik akarnya mempunyai ciri khas antara angka akhir bilangan yang ditarik akarnya dengan angka akhir hasil menarik akar itu.

Bilangan (kubik) yang ditarik akarnya dengan angka akhir	Bilangan hasil penarikan akar dengan angka akhir
0	0
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

Untuk menarik dari akar kuadrat dapat digunakan konsep rumus-rumus berikut ini.

1. $\sqrt[3]{a^3b^6c^{18}} = a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}c^{\frac{18}{3}} = a^1b^2c^6 = ab^2c^6$
2. $\sqrt[3]{a^3b^8} = a^1b^2\sqrt[3]{b^2} = ab^2\sqrt[3]{b^2}$

Contoh:

Sederhnakanlah

a. $\sqrt[3]{729}$ b. $\sqrt[3]{5832}$ c. $\sqrt[3]{13824}$ d. $\sqrt[3]{162}$ e. $\sqrt[3]{648}$

Solusi:

a. $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9$

b. **Strategi 1:** $\sqrt[3]{5832} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^6} = 2^{\frac{3}{3}} \times 3^{\frac{6}{3}} = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$

Strategi 2:

Untuk menarik akar tiga dari suatu bilangan yang lebih dari 1000 dapat digunakan prosedur sebagai berikut.

- Langkah 1: Kelompokkan tiga angka-tiga angka mulai dari belakang.
- Langkah 2: Carilah tiga bilangan yang sama yang perkaliannya sama atau mendekati angka paling depan setelah dikelompokkan. Perhatikan bahwa angka kembar ini merupakan angka puluhan dari akar kubik.
- Langkah 3: Tentukan angka satuannya dengan berdasarkan pada table di atas.

Dengan demikian,

- $\sqrt[3]{5|832}$
- Angka yang sama adalah 1 × 1 × 1 = 1 yang mendekati 5. Berarti angka puluhannya 1.
- Angka terakhir dari 5832 adalah 2 yang bersesuaian pangkat kubik bilangan yang mempunyai angka akhir 8. Berarti, angka satuannya 8.

Jadi, $\sqrt[3]{5832} = 18$.

c. **Strategi 1:** $\sqrt[3]{13824} = \sqrt[3]{2^9 \times 3^3} = 2^3 \times 3 = 24$

Strategi 2:

- $\sqrt[3]{13|824}$
- Angka yang adalah 2 × 2 × 2 = 8 yang mendekati 13. Berati angka puluhannya 2.
- Angka terakhir dari 13824 adalah 4 yang bersesuaian dengan pangkat kubik bilangan yang mempunyai angka akhir 4. Berarti angka satuannya 4.

Jadi, $\sqrt[3]{13824} = 24$

d. $\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \times 3^4} = 3\sqrt[3]{2 \times 3} = 3\sqrt[3]{6}$

e. $\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^4} = 2 \times 3\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$

3. Membandingkan Bentuk Akar

- Akar senama adalah akar-akar yang mempunyai indeks sama.

  Contoh:

  $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[4]{8}$, $7\sqrt[4]{2}$, dan $\frac{2}{3}\sqrt[4]{2}$ adalah akar-akar senama.

- Akar sejenis adalah akar-akar yang mempunyai indeks maupun radikan (bilangan pokok) sama.

  Contoh: $\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, dan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ adalah akar-akar sejenis; $3\sqrt[5]{7}$, $\frac{2}{9}\sqrt[5]{7}$, dan $\sqrt[5]{7}$ adalah akar-akar sejenis.

- Mengubah akar-akar menjadi senama adalah sebagai berikut.

  Akar-akar $\sqrt[m]{ab^n}$ dan $\sqrt[p]{c^p d^r}$ dapat diubah menjadi akar-akar sejenis $\sqrt[mp]{a^p b^{pn}}$ dan $\sqrt[mp]{c^{mp} d^{mr}}$.

  Contoh:

Perikasalah bahwa $\sqrt{25} > \sqrt{16}$, $\sqrt{3} > \sqrt[5]{7}$, dan $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

Solusi:

- $\sqrt{25} = 5$ dan $\sqrt{16} = 4$

  Karena 25 > 16, maka $\sqrt{25} > \sqrt{16}$.

- $\sqrt{3} = \sqrt[10]{3^5} = \sqrt[10]{243}$ dan $\sqrt[5]{7} = \sqrt[10]{7^2} = \sqrt[10]{49}$

  Karena 243 > 49, maka $\sqrt[10]{243} > \sqrt[10]{49}$ atau $\sqrt{3} > \sqrt[5]{7}$.

- $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$ dan $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$

  Karena 8 < 9, maka $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$ atau $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.